



1741

Curvarum maximi minive proprietate gaudientium inventio nova et facilis

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Curvarum maximi minive proprietate gaudientium inventio nova et facilis" (1741). *Euler Archive - All Works*. 56.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/56>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.

CVRVARVM
MAXIMI MINIMIVE
PROPRIETATE GAUDENTIVM
INVENTIO NOVA ET FACILIS.

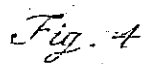
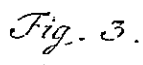
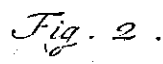
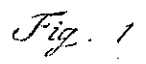
AVCTORE

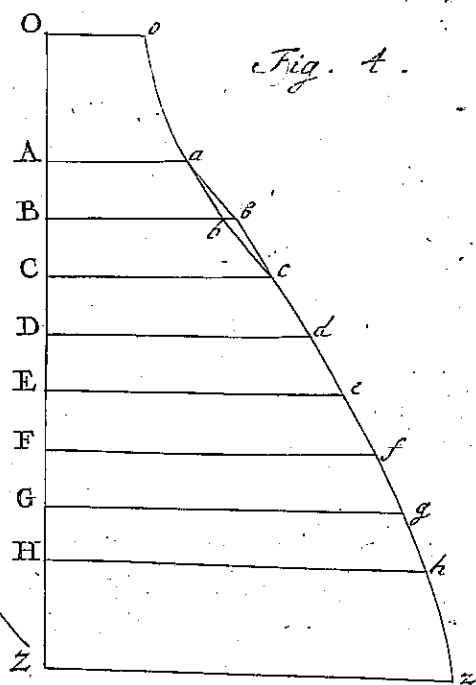
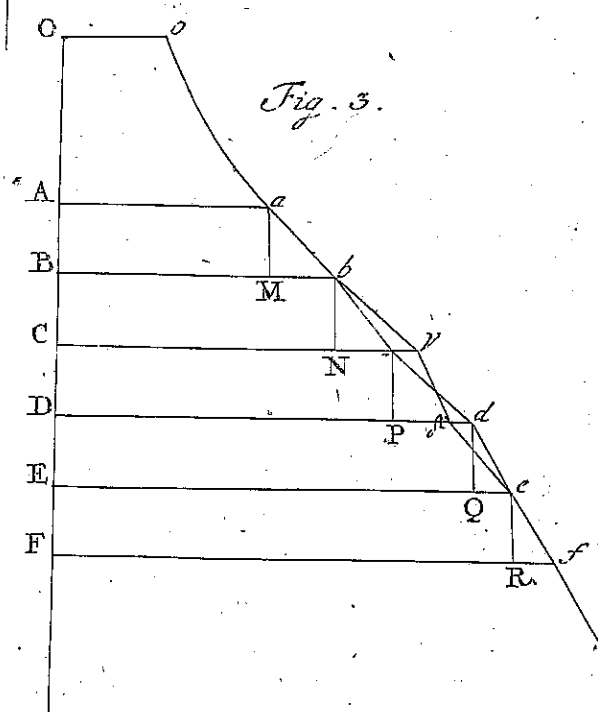
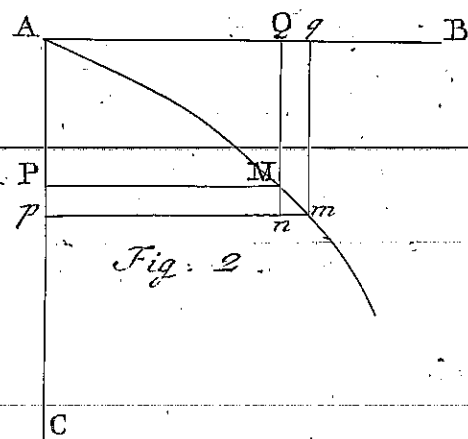
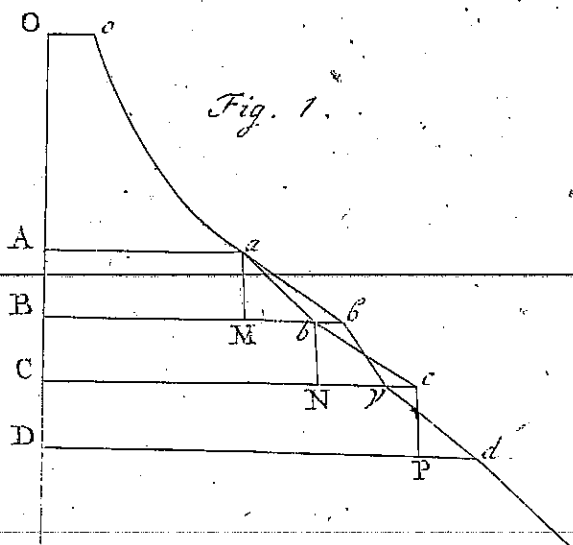
Leonh. Eulero.

§. 1.

Q Vanquam hoc problema, quod sub initio huius Tabb. IX, X, seculi ab acutissimo Geometra *Iac. Bernoulli* cum erat propositum tum solutum, iam a pluribus eximiis viris tractatum atque diuersas solutiones nactum, a me vero demum ante aliquot annos in latiore sensu prolatum est; atque methodo tam facili solutum, vt nihil amplius desiderari posse videatur: tamen nuper in eiusmodi huius generis quaestiones incidi, ad quas soluendas formulae tum temporis a me exhibitae, non erant sufficientes, adeo vt coactus fuerim nouas formulas latius patentes contemplari, atque pro iis ad problema soluendum idoneos valores inuestigare. In hoc autem negotio occupatus non solum faciliorem quam ante detexi viam ad solutiones huiusmodi problematum perueniendi, sed etiam omnes 24 formulas, quas ante tractaueram, in vnicam sum complexus, atque praeterea ad alias adhuc latius patientes calculum accommodare licuit.

§. 2.





§. 2. Quo autem calculum, qui pro formulis tantopere compositis modo designandi consueto nimis fieret prolixus et taediosus, tractabiliorem redderem, visum est a recepto signandi modo aliquantum recedere, atque alia signa adhibere, quibus cum breuitati tum potissimum distinctioni consuleretur. Sic quantitatem variabilem y in situm proximum promotam ita designa-

^I
bo y , hancque si denuo in situm proximum transferatur ita y ; et si ulterius in situm proximum promouetur mihi indicabitur per y et ita porro, adeo ut mihi sit

$$\text{I} \\ y = y + dy$$

$$\text{II} \\ y = y + 2dy + ddy$$

$$\text{III} \\ y = y + 3dy + 3ddy + d^3y \text{ etc.}$$

Simili igitur modo in sequentibus erit

$$\text{I} \\ dy = dy + ddy$$

$$\text{II} \\ dy = dy + 2ddy + d^3y$$

$$\text{III} \\ dy = dy + 3ddy + 3d^3y + d^4y$$

atque similiter porro

$$\text{I} \\ ddy = ddy + d^3y$$

$$\text{II} \\ ddy = ddy + 2d^3y + d^4y$$

$$\text{III} \\ ddy = ddy + 3d^3y + 3d^4y + d^5y \text{ etc.}$$

§. 3.

§. 3. His praemonitis problemata primae classis Figura 1.
aggredior, in quibus quaeritur curua, quae inter omnes
omnino curuas inter eosdem terminos sitas maximi vel
minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Sit igitur oa
curua quaesita ad axem OA relata, ponaturque $OA = x$,
 $Aa = y$, et arcus $oa = s$. Tum sumtis duobus abscissae
elementis aequalibus $AB = BC = dx$, ducantur applica-
tae Bb et Cc . Deinde concipiantur duo alia elementa
curuae proxima $a\epsilon$, ϵr puncta a et c iungentia. Qui-
bus factis manifestum est ex natura maximorum vel mi-
nimorum quantitatem, quae pro curua oa maxima vel
minima esse debet, eam siue ad elementa abc siue
ad elementa $a\epsilon c$ referatur in utroque casu eundem
valorem producere debere. Quamobrem differentia
inter valores, qui prodeunt ex consideratione tum ele-
mentorum abc tum $a\epsilon c$, si nihilo aequalis ponatur,
dabit aequationem, qua natura curuae exprimetur. Ista
autem differentia semper ad huiusmodi formam reduci
potest $P.b\epsilon$, in qua P per solas quantitates x, y, s ,
earumque differentialia una cum constantibus determina-
tur. Quocirca ista aequatio $P = 0$, exprimet naturam
curuae quaesitae.

§. 4. Proposito ergo quocunque problemate, quod
inter omnes omnino curuas intra eosdem terminos con-
stitutas determinare iubet eam, quae maximi vel mini-
mi proprietate gaudeat, ex formula, quae maximum
vel minimum esse debet, elici oportet valorem ipsius P ,
qui nihilo aequalis positus dabit aequationem pro curua
quaesita. Totum ergo hoc negotium absoluetur; si re-
gula tradatur, cuius ope ex data expressione, quae ma-
Tom. VIII. X xi-

imum minimumue esse debet, inueniri queat valor P. Ad huiusmodi autem regulam inueniendam exprimat $\int Q dx$ eam quantitatem, quae in curua quaesita maxima esse debeat vel minima, sitque Q quantitas vtcunque composita ex x, y , et s , horumque differentialibus dx, dy , et ds . Seu posito $dy = p dx$, vt sit $ds = dx \sqrt{1 + pp}$, fit quantitas vtcunque composita ex x, y, s et p ; ita vt eius differentiale huiusmodi sit habiturum formam $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp$. Quae formula vtique multo latius patet, quam omnes 16 priores formulae, quas in praecedente differtatione exhibui.

§. 5. Considerentur ab et bc tanquam curuae inueniendae elementa genuina, dum altera $a\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}c$ tantum ad conceptum maximi minimiue formandum sint in subsidium vocata. Cum igitur $\int Q dx$ debeat esse maximum vel minimum in curua oa , ea expressio pro elemento ab dabit $Q dx$ et elemento bc vero $\overset{I}{Q} dx$, adeo vt elemento ab respondeat expressio $Q dx$ et elemento bc haec $\overset{I}{Q} dx$, vtrique autem elemento coniunctim $ab + bc$ ista formula $(Q + \overset{I}{Q}) dx$. Iam quaerantur expressiones, quae elementis assumptitiis $a\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}c$ respondeant; hae enim coniunctae et a $(Q + \overset{I}{Q}) dx$ subtractae dabunt residuum ipsi P. $b\mathcal{E}$ aequale et propterea determinabunt valorem ipsius P, ex quo aequatio pro curua obtinebitur. Expressio autem $Q dx$, quae respondet elemento ab transibit in expressionem respondentem elemento $a\mathcal{E}$, si loco p seu $\frac{bM}{aM}$ scribatur $p + \frac{b\mathcal{E}}{ax}$ seu $\frac{\mathcal{E}M}{aM}$; quanti-

quantitates enim x, y et s a puncto a , quod utrique elemento ab et $a\mathcal{E}$ commune est, pendent tantum, ideoque inuariatae manent.

§. 6. Differentia ergo inter expressiones, quae elementis ab et $a\mathcal{E}$ respondent, obtinebitur si Qdx differentietur, et loco ds, dy et dx scribatur 0 , loco dp vero $\frac{b\mathcal{E}}{dx}$. Cum autem sit differentiale ipsius $Qdx = dQdx = (Lds + Mdy + Ndx + Vdp)dx$, erit illa differentia $= V.b\mathcal{E}$. Porro ex expressione Qdx elemento $b\mathcal{E}$ respondente, ubi Q est talis functio ipsarum s, y, x , et p qualis ante erat Q ipsarum s, y, x et p , inuenietur expressio respondens elemento $\mathcal{E}c$, si loco $y = Bb$, scribatur $y + b\mathcal{E}$, loco $s = 0a + ab$ vero $s + \mathcal{E}m = s + \frac{dy.b\mathcal{E}}{ds}$ atque loco $p = \frac{cN}{bN}$ ponatur $p - \frac{b\mathcal{E}}{dx}$. Quamobrem differentia inter expressiones elementis $b\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}c$ habebitur, si Qdx differentietur et loco dy scribatur $b\mathcal{E}$, loco ds vero $\frac{dy.b\mathcal{E}}{ds}$ atque loco dp ponatur $-\frac{b\mathcal{E}}{dx}$. Cum igitur sit $dQdx = (Lds + Mdy + Ndx + Vdp)dx$, erit haec differentia $= \frac{Ldx dy.b\mathcal{E}}{ds} + Mdx.b\mathcal{E} - V.b\mathcal{E}$. Differentia ergo inter expressiones elementis $ab + b\mathcal{E}$ et elementis $a\mathcal{E} + \mathcal{E}c$ respondentes erit $(V + \frac{Ldx dy}{ds} + Mdx - V)b\mathcal{E} = (\frac{Ldx dy}{ds} + Mdx - V)b\mathcal{E} = P.b\mathcal{E}$. Aequatio

tio ergo pro curua quaesita erit haec $P = \frac{Ldx dy}{ds} + Mdx - dV = 0$, seu $Ldx dy + Mdx ds = ds dV$.

§. 7. Si ergo quaerenda sit curua oa , in qua $\int Q dx$ vel maius sit vel minus, quam inter omnes alias curuas intra eosdem terminos fitas, atque Q fuerit functio quaecunque ipsarum x, y, s et p posito $p = \frac{dy}{dx}$ sequens habebitur regula ad valorem ipsius P inueniendum. Differentietur primo Q et in differentiali ponatur $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ atque $dp = 1$; deinde differentietur Q et in differentiali ponatur $ds = \frac{dx dy}{ds}$, $dy = dx$, $dx = 0$, atque $dp = -1$. His factis haec differentialia duo coniuncta dabunt valorem ipsius P . Ita casu quo posuimus $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vds$ prodibit per hanc regulam vt ante $P = \frac{Ldx dy}{ds} + Mdx - dV$. Sit exempli gratia propositum curuam inuenire, in qua $\int \frac{u dy}{u^2 + \sqrt{c^2 ds^2 - u^2 dx^2}}$ denotante u functionem quamcunque ipsius x , sit minimum. Posito ergo $dy = p dx$ erit $\int Q dx = \int \frac{(1+pp)dx}{pu + \sqrt{c^2(1+pp) - u^2}}$ et $Q = \frac{1+pp}{pu + \sqrt{c^2(1+pp) - u^2}}$. Erit ergo $L = 0$, $M = 0$, et $V = \frac{c^2(1+pp)p - 2pu^2 + u(pp-1)\sqrt{c^2(1+pp) - u^2}}{(pu + \sqrt{c^2(1+pp) - u^2})^2 (c^2(1+pp) - u^2)}$. Cum autem sit $dV = P = 0$, erit $V = \text{const.}$ atque $(au - u^2)(p^2 - 1) - c^2(p^2 + 1) = \frac{(2u-a)(1+pp)c^2p + 2pu(au-u^2)}{\sqrt{c^2 + c^2p^2 - u^2}}$ quae reducitur ad hanc $dy = \frac{(u^2 - au - cc)dx}{c\sqrt{(u-a)^2 - c^2}}$.

§. 8. Ope huius regulae etiam facile erit pro aliis expressionibus valorem ipsius P inuenire, id quod exemplo

emplo formularum posteriorum dissertationis meae declarabo. Sit expressio, quae maximum minimumue esse debet, $\int Q dx \int R dx$, atque $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp$ et $dR = E ds + F dy + G dx + I dp$ posito $dy = p dx$. Quod ergo ante erat Q nunc nobis est $Q \int R dx$, et quod erat Q nunc erit $Q \int R dx + \overset{I}{Q} R dx$. Prioris autem formulae differentiale est $(L ds + M dy + N dx + V dp) \int R dx + \overset{I}{Q} R dx$; unde positis $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ et $dp = 1$ resultat valor $V \int R dx$. Posterioris autem formulae differentiale est $(L ds + M dy + N dx + V dp)(\int R dx + R dx) + \overset{I}{Q} R dx + \overset{I}{Q} dx (E ds + F dy + G dx + I dp)$, quod iuxta praecepta posito $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $dp = 1$, $\overset{I}{ds} = \frac{dx dy}{ds}$, $dy = dx$ et $\overset{I}{dp} = -1$, dabit hunc valorem $(\frac{\overset{I}{L} dx dy}{ds} + \overset{I}{M} dx - \overset{I}{V})(\int R dx + R dx) + \overset{I}{Q} I dx$. His coniunctis et neglectis negligendis fit $P = (\frac{\overset{I}{L} dx dy}{ds} + M dx) \int R dx - dV \int R dx - R V dx + Q I dx = -dV \int R dx + dx(\frac{\overset{I}{L} dy}{ds} + M) \int R dx + Q I dx = 0$. Quae est aequatio pro curua quaesita.

§. 9. Si aliae etiam expressiones in his non contentae fuerint propositae, quae maximum minimumue esse debeant, semper per regulam datam, qua poni debet $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$, $\overset{I}{dp} = 1$, $\overset{I}{ds} = \frac{dx dy}{ds}$, $\overset{II}{dy} = dx$, et $\overset{I}{dp} = -1$, valor ipsius P , et inde simul aequatio

quatio pro curua inuenta reperietur. Vt inuenienda fit curua, in qua $\frac{f s d x}{f y d x}$ debeat esse maximum vel minimum,

$$\text{erit } Q = \frac{s}{f y d x} - \frac{y f d x}{(f y d x)^2}, \text{ atque } Q = \frac{I}{f y d x} - \frac{I}{(f y d x)^2} - \frac{I}{(f y d x)^2} - \frac{I}{(f y d x)^2} - \frac{I}{(f y d x)^2} + \frac{2 y y d x f s d x}{(f y d x)^3}.$$

Hinc differentiando ex Q oritur 0, atque ex Q oritur $\frac{d x d y}{d s f y d x} - \frac{y d x^2 d y}{d s (f y d x)^2} - \frac{d x f s d x}{(f y d x)^2} - \frac{s d x^2}{(f y d x)^2} + \frac{2 y d x^2 f s d x}{(f y d x)^3} = P.$ Neglectis ergo negligendis fiet

$$P = \frac{d x d y f y d x - d s d x f s d x}{d s (f y d x)^2}.$$

Posito itaque hoc pro P inuento valore $= 0$ prodibit aequatio pro curua quaesita $d y f y d x = d s f s d x.$ Ponatur $d y = q d s$, erit $d q f y d x = s d x$ seu $f y d x = \frac{s d x - q y d x}{d q}.$ Quae denuo differentiatu posito $d x$ constante dat $y d q^2 = d s d q - y d q^2 - q d y d q - s d d q + q y d d q$ seu $2 y d q^2 + q d y d q - q y d d q = d s d q - s d d q$ vel restituto $q s d s^2 d d s^2 + 2 s d y^2 d d s^2 = 3 y d s d y d d s^2 + s d s d y^2 d^3 s - y d y^3 d^3 s.$

§. 10. Ex his praeceptis iam satis intelligitur, si expressio, quae maximum vel minimum esse debeat, sit non solum ipsarum x, y, s et p functio quaecunque, sed etiam praeter ea integrales formulas contineat; quemadmodum eam tractari, atque tandem ad aequationem naturam curuae exprimentem perueniri oporteat. Valet itaque ista methodus pro omnibus expressionibus, quae partim ex integralibus, partim denique ex harum differentialibus sunt conflatae; adeo ut ad omnes omnino quaestiones soluendas sufficere videatur. Interim tamen incidi nuper in quaestionem quae ad hanc methodum referri non poterat, sed peculiarem solutionem requirebat.

bat. Ita autem illa quaestio erat comparata, ut in formula $\int Q dx$, quae maximum minimumue esse debet; praeter x, y, s eorumque differentialia etiam differentialia secundi gradus essent contenta. Facile autem intelligitur, quoties differentialia secundi gradus occurrant, tum hactenus tradita praecepta non valere, sed novam omnino methodum requiri.

§. 11. Cum autem differentialia secundi gradus bina elementa afficiant, ita ut translatio puncti b in ξ , differentialia secundi gradus elementi ante ab fitti immutent, non difficulter perspicietur, ad huiusmodi quaestiones soluendas praeter elementa ab et bc insuper praecedens et sequens in computum duci debere. Sint igitur $abcde$ quatuor elementa curvae inveniendae, quorum bina tantum media bcd , ut ante fecimus, in situm proximum $b\gamma d$ transferantur. Ponatur $OA = x$, $Aa = y$, et $oa = s$, atque elementis abscissae x aequalibus sumtis, erit $Bb = y$, $Cc = y$, $Dd = y$ et $Ee = y$. Posito praeterea $dy = p dx$, erit $\frac{cM}{ax} = p$, $\frac{cN}{ax} = p$, $\frac{dP}{ax} = p$ atque $\frac{eQ}{ax} = p$. Quia denique differentialia secundi gradus in formula proposita inesse ponuntur fiat $dp = r dx$ ita ut sit $ddy = r dx^2$, et $dds = \frac{p r dx^2}{\sqrt{(1+p^2)}}$. His positis erit $r = \frac{ddy}{dx^2} = \frac{cN - bM}{dx^2}$ atque $r = \frac{dP - cN}{dx^2}$ et $r = \frac{eQ - dP}{dx^2}$.

Figura 2.

§. 12. Si iam elementa $abcde$ in elementa $ab\gamma de$ transire concipiantur, valores ante inveni incrementa vel decrementa accipient. Fient autem incrementa haec

ut

vt ex inspectione figurae apparet, sequentia: $ds=0$, $dy=0$, $dx=0$, $dp=0$; denotant enim ds , dy , dx , dp , incrementa ipsarum s , y , x , et p , dum punctum c in γ transfertur, haec vero mutatio has quantitates non afficit, sed translato c in γ abibit r in $\frac{\gamma N - bM}{dx^2}$, erit itaque

incrementum quod r interea capit seu $dr = \frac{c\gamma}{dx^2}$. Por-

ro erit $ds=0$, $dy=0$, $dp=\frac{c\gamma}{dx}$ et $dr=\frac{dp-\gamma N}{dx^2}$

$\frac{dp-\gamma N}{dx^2} = \frac{-2c\gamma}{dx^2}$. Deinceps autem fiet $ds=\gamma n = \frac{cN\gamma e}{bc}$

$= \frac{dy \cdot c\gamma}{ds}$; $dy=c\gamma$; $dp=\frac{c\gamma}{dx}=dr=\frac{c\gamma}{dx^2}$. Denique erit

$ds = \frac{dy \cdot c\gamma}{ds} - \frac{dy \cdot c\gamma}{ds} = -c\gamma d \cdot \frac{dy}{ds}$; atque $dy=0$, $dp=0$,

$dr=0$; haec enim elementa non amplius a mutatione puncti c afficiuntur.

§. 13. Sit nunc curua inuenienda, in qua debeat esse maximum vel minimum $\int Q dx$, in qua expressio-
ne Q fit compositum quomodocunque ex x , y , s , ha-
rumque quantitatuum differentialibus tam primi quam se-
cundi gradus; ita vt Q futura sit functio quaecunque
ipsarum x , y , s , p et r . Iam quia $\int Q dx$ pro omni
curuae portione ab o incipiente debet esse maximum
vel minimum, necesse est, vt tale quoque sit pro ele-
mentis $abcde$. Quare $\int Q dx$ eundem valorem habere
debebit tam in elementis $abcde$ quam in $ab\gamma de$. Pro
elementis autem $abcde$ dat ista formula hunc valorem

$Qdx + Qdx + Qdx + Qdx$, huius ergo differentiale

ex

ex translatione puncti c in γ ortum debet esse $=0$,
vel dabit valorem ipsius $P.c\gamma$. Posito autem $dQ =$
 $Lds + Mdy + Ndx - Vdp + Wdr$, erit pro diffe-
rentialibus valoribus exhibitis substituendis vt sequitur:

$$d. Qdx = \frac{W.c\gamma}{dx}$$

$$d. Qdx = V.c\gamma - \frac{W.c\gamma}{dx}$$

$$d. Qdx = \frac{Ldx dy}{ds} c\gamma + Mdx.c\gamma - V.c\gamma + \frac{W.c\gamma}{dx}$$

$$d. Qdx = -Ldx d. \frac{dy}{ds} c\gamma$$

Quorum valorum summa dabit hanc expressionem $P =$
 $\frac{dW}{dx} - dV + \frac{Ldx dy}{ds} + Mdx$ neglectis negligendis. Pro
curua quaesita ergo habebitur ista aequatio

$$dW - dV dx + \frac{Ldx^2 dy}{ds} + Mdx^2 = 0,$$

posito perpetuo dx constante.

§. 14. Quo hanc regulam exemplo illustremus sit *Figura 3.*
nobis propositum inter omnes curuas per puncta A et M
transeuntes eam determinare, quae cum sua euoluta AO
minimum spatium AOM comprehendat. Positis ergo
 $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, erit radius osculi $MO =$
 $-\frac{ds^2}{dx dy}$ posito dx constante. Facto ergo $dy = p dx$
erit $ds = dx \sqrt{1 + pp}$ et $ddy = dp dx$, vnde fiet

$$\text{radius osculi } MO = \frac{-dx(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Atque posito dp

Tom. VIII.

Y

$= r dx$

$= r dx$ erit is $= -\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{r}$. Hinc area AMO erit

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}} ds}{r} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1+pp)^2 dx}{r}; \text{ oportet ergo}$$

ut sit $\int \frac{(1+pp)^2 dx}{r}$ minimum; quare habebimus $Q = \frac{(1+pp)^2}{r}$ et $dQ = \frac{4pdp(1+pp)}{r} - \frac{(1+pp)^2 dr}{r^2}$. Erit itaque $L=0$, $M=0$, $N=0$, $V = \frac{4p(1+pp)}{r}$ et $W = -\frac{(1+pp)}{r^2}$. Quocirca cum sit $ddW = dVdx$; erit $dW = Vdx + Adx$. Erit autem W

$$= \frac{-ds^4}{dx^2 dp^2} = \frac{-ds^4}{d^2 y^2} \text{ et } V = \frac{4dy ds^2}{dx^2 dp} = \frac{4dy ds^2}{dx d^2 y}. \text{ Hanc ob rem}$$

$$\text{erit } -\frac{4ds^2 dy}{d^2 y} + \frac{2ds^4 d^2 y}{d^2 y^3} = \frac{4dy ds^2}{d^2 y} + Adx \text{ seu } \frac{ds^4 d^2 y}{d^2 y^3} =$$

$$\frac{4dy ds^2}{d^2 y} + Adx \text{ siue } (1+pp)^2 dx ddp = 4p(1+pp)$$

$$dx dp^2 + Adp^3. \text{ Ponatur } dx = \frac{dp}{r} \text{ ut sit } ddp = \frac{dp dr}{r},$$

$$\text{erit } \frac{(1+pp)^2 dp^2 dr}{r^2} = \frac{4p(1+pp) dp^3}{r} + Adp^3, \text{ seu}$$

$$\frac{(1+pp)^2 dr}{r^2} - \frac{4(1+pp) r dp}{r^2} = Adp, \text{ cuius integrale est } B -$$

$$Ap = \frac{(1+pp)^2}{r} \text{ seu } \frac{Bdp - Apdp}{(1+pp)^2} = dx. \text{ Si ponatur } B=0, \text{ fiet}$$

$$x = \frac{a}{1+pp} = \frac{a dx^2}{ds^2} \text{ atque } x dx^2 + x dy^2 = a dx^2, \text{ unde}$$

$$\text{erit } dy = dx \sqrt{\frac{a-x}{x}}, \text{ quae est aequatio pro cycloide in A}$$

$$\text{maximum radium osculi habente. At si } A=0 \text{ erit}$$

$$\frac{Bdp}{(1+pp)^2} = dx \text{ seu } \frac{Bdp}{(1+pp)^2} = dy \text{ erit ergo } y = \frac{a}{1+pp} \text{ seu}$$

$$y = \frac{a dx^2}{ds^2} \text{ unde fit } x = \int \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{a-y}}, \text{ quae est pro cycloide in}$$

$$A \text{ cuspidem habente. Generatim vero erit } ds =$$

$$\frac{Bdp - Apdp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}, \text{ cuius integralis est } s = \frac{ap+b}{\sqrt{1+pp}} \text{ seu } s ds$$

$$= a dy + b dx, \text{ quae integrata dat } s^2 = 2ay + 2bx, \text{ et}$$

$$\sqrt{2ay}$$

$s = \sqrt{2ay + 2bx}$, quae itidem est pro cycloide ad
 ad axem oblique ductum. Ex quibus perspicitur quae-
 stioni propositae aliam curuam non satisfacere praeter
 cycloidem; ita ut inter omnes curuas per puncta A et M
 transeuntes nulla sit nisi cyclois, quae cum sua euoluta
 tam exiguum spatium comprehendat.

§. 15. Sit nunc propositum inter omnes curuas
 AM determinare eam in qua $\int \frac{ddy}{ds}$ fit maximum vel
 minimum. Ponatur ergo $dy = p dx$ et $dp = r dx$ erit
 $\int \frac{ddy}{ds} = \int \frac{r dx}{\sqrt{1+pp}}$ ideoque $Q = \frac{r}{\sqrt{1+pp}}$ et $dQ = \frac{dr}{\sqrt{1+pp}}$
 $-\frac{rp dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. Quare erit $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $V =$
 $-\frac{rp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $W = \frac{1}{V(1+pp)}$. Cum igitur fit ddW
 $= dV dx$ erit $dW = V dx + A dx$, hoc est $\frac{-p dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$
 $= \frac{-rp dx}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + A dx = \frac{-p dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{A dp}{r}$. Erit itaque
 $dp = 0$ et $y = ax$ seu linea quaesita recta; quae termi-
 norum destructio inde oritur, quod fit $\int Q dx = \int \frac{dp}{\sqrt{1+pp}}$,
 integrabile. At si quaeratur curua in qua $\int \frac{ddy}{y ds}$ fit
 maximum vel minimum, fiet $Q = \frac{r}{y\sqrt{1+pp}}$ et $dQ =$
 $\frac{dr}{y\sqrt{1+pp}} - \frac{rp dp}{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r dy}{y^2 \sqrt{1+pp}}$, ita ut fit L
 $= 0$, $M = \frac{-r}{y^2 \sqrt{1+pp}}$, $N = \frac{-rp}{y(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $W =$
 $\frac{1}{y\sqrt{1+pp}}$

$\frac{1}{y\sqrt{1+pp}}$. Hinc erit $ddW - dV dx + M dx^2 = 0$;

quae euoluta dat hanc aequationem $\frac{2dp+ppdp}{p+p^3} = \frac{2dy}{y}$ cuius integralis est $y^2 = \frac{a^2 p^2}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{a^2 dy^2}{dx ds}$; quae reducta dat $dx\sqrt{2} = \frac{dy}{y}\sqrt{-y^2 + \sqrt{y^4 + 4a^4}}$ cuius integratio a circuli et hyperbolae quadraturis pendet.

§. 16. Quanquam in his exemplis posuimus quantitatem Q absolute dari, tamen regula data aequae locum habet, eodemque modo potest usurpari, si Q tantum per aequationem differentialem detur, ita ut valor ipsius Q per integrationem assignari nequeat. Huiusmodi casum quidem iam tractauimus, cum curuam brachystochronam in quocunque medio resistente determinarem. Eundem igitur casum ad usum regulae §. 6. datae plenius ostendendum hic evolueri conueniet. Propositum ergo sit curuam AM inuestigare, super qua corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum in medio quocunque resistente celerrime descendat. Ad hoc problema soluendum ponatur $AP=x$, $PM=y$ et $AM=s$; trahaturque corpus in M a vi P in directione applicatae MP, et ab alia vi Q in directione MQ parallela axi AP; constat enim ad has duas vires potentias quascunque reduci posse. Posito ergo $dy = p dx$ et $ds = dx\sqrt{1+pp}$ erit vis tangentialis accelerans ex iis orta $= \frac{Q - Pp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{Qdx - Pdy}{ds}$ vis normalis vero erit $= \frac{Qp + P}{\sqrt{1+pp}}$ $= \frac{Qdy + Pdx}{ds}$.

§. 17. Sit nunc celeritas in M debita altitudini v et resistentia aequalis sit R functioni cuiusque ipsius v .

His

His positis erit $dv = Qdx - Pdy - Rds$. Tempus vero, quo corpus arcum AM absoluit, erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$, quod debet esse minimum. Quae formula cum superiore $\int Qdx$ comparata dat $Q = \frac{v(1+pp)}{\sqrt{v}}$; ex qua erit $dQ = \frac{pdp}{\sqrt{v(1+pp)}} - \frac{dv\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ et loco dv valore substituto erit $dQ = \frac{Rds\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{Pdy\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} - \frac{Qdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{pdp}{\sqrt{v(1+pp)}}$. Fit igitur $L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $N = \frac{-Q\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ atque $V = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$. Cum autem sit per regulam datam $Ldx dy + Mdx ds = dV$ ds seu $Lpdx + Mdx\sqrt{(1+pp)} = dV\sqrt{(1+pp)}$ erit substitutis valoribus inuentis et per $\sqrt{(1+pp)}$ diuisione facta $\frac{Rpd x + Pdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} = d \cdot \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}} - \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{p dv}{2v\sqrt{v(1+pp)}} - \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{Qpdx + Pp^2 dx + Rpd x\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v(1+pp)}}$ substitutis loco dv et in eius expressione loco dy et ds valoribus assumtis.

§. 18. Si nunc haec aequatio reducatur prodibit sequens $\frac{Pdx + Qpdx}{2v\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; in qua ergo aequatione non amplius inest resistentia R . Ad indolem igitur huius aequationis inuestigandam duco curuae radium osculi MO quem pono z , exprimet $\frac{z^2}{z}$ vim centrifugam, qua corpus curuam iuxta normalem MS premit. Erit autem ob dx constans assumtum $z = \frac{ds^2}{dx dy}$

$$= \frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}, \text{ ita ut sit } \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{z}. \quad \text{Hoc}$$

ergo valore substituto et per dx diuiso fiet $\frac{z}{z} = \frac{P+Qp}{2v\sqrt{(1+pp)}}$ feu $\frac{z}{z} = \frac{P+Qp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Exprimit autem ut modo inenimus $\frac{z}{z}$ vim centrifugam, cuius directio est normalis MS, atque ut ante notauimus $\frac{P+Qp}{\sqrt{(1+pp)}}$ exhibet vim normalem ex resolutione potentiarum sollicitantium P et Q ortam et in directione MS curuam prementem. Quocirca in hypothesi potentiarum quarumcunque sollicitantium et resistentiae cuiuscunque ea curua est brachystochrona, quae premitur a corpore super ea moto vi duplo maiore, quam a sola vi centrifuga.

§. 19. His igitur sufficienter expositis, quae tum ad methodum hanc inter omnes curuas eam determinandi, quae maximi minimue cuiusdam proprietate gaudeat, intelligendam, tum etiam ad eius usum in quibusque huius generis problematis declarandum necessaria visa sunt; progredior ad sequentem huius generis quaestionum classem, quae proprie sub problematis isoperimetrici nomine est nota, in qua non ex omnibus curuis intra datos terminos fitis, sed iis tantum, quae vel aequae sunt longae vel aliam quamcunque proprietatem communem habent, inueniri debet ea curua, quae maximi vel minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Hocque est problema tanti in re analytica usus, tantaque dignitatis, in quo enodando acutissimi Viri *Bernoullii*, *Taylorus* atque *Hermannus* ingentem collocauerunt operam; cuiusque ego etiam in dissertatione ante aliquot annos de prob-

problemate isoperimetrico solutionem satis breuem atque facilem tradidi, ope formularum, quibus cuiusque generis quaestiones admodum expedite resolui possunt.

§. 20. Quod hae duae proprietates, quarum altera omnium curuarum communis esse debet, altera vero in quaesita maximum minimumue, inter se commutari et altera in alterius locum collocari queant, iam satis constat; atque ego etiam pro plurimis huiusmodi proprietatibus exhibui formulas sub littera P consignatas, quae nulla facta distinctione inter binas proprietates propositas usurpari atque statim ad aequationem pro curua quaesita deduci possunt. Hic quidem eodem utar modo, et per huiusmodi formulas P totum negotium absoluam; sed triplici ratione illam priorem methodum ad maiorem perfectionis gradum sum euecturus. Primum enim exponam methodum magis genuinam, cuius ope eiusmodi formulae multo facilius elici possunt. Deinde ingentem formularum ibi traditarum numerum contraham, ita ut omnes illae coniunctae in vnica vel duabus contineantur. Tertio etiam eiusmodi proprietates, quae vel curuis communes vel in quaesita maximum minimumue esse debent, euoluam et ad formulas deducam, ad quas inueniendas prior mea methodus vel nimis difficulter vel omnino non sufficebat.

§. 21. Sit igitur $\int Q dx$ quantitas seu proprietas quae vel omnibus curuis puncta o et a iungentibus communis vel in quaesita maxima minimaue esse debeat; constat eam in utroque casu in elementa $abcd$ aequae competere debere ac in elementa $a\delta\gamma c$. Quare si illa quantitas $\int Q dx$ ad elementa $abcd$ applicetur, et

Tabula X.
Figura 2.

tum

175 INVENTIO CURVARVM MAXIMI MINIMI.

tum eius valor quaeratur translatis punctis b et c in proxima ξ et γ , oportebit ut differentia inter hos duos valores sit $=0$. Differentia autem ista statim habebitur, si valor ipsius $\int Q dx$, qui responder elementis $ab cd$ ita differentietur, ut puncta tantum b et c variari ponantur; quare et hoc ipsum differentiale debebit esse $=0$. Hoc autem differentiale huiusmodi habebit formam $A.b\xi - B.c\gamma = 0$, quae cum forma in priori dissertatione stabilita $P.b\xi - (P + dP).c\gamma = 0$ comparata dabit $\frac{dP}{P} = \frac{B-A}{A}$ ex qua aequatione valor ipsius P respondens quantitati $\int Q dx$ inuenietur. Hoc autem facto problema quodque propositum facile resoluetur per hanc regulam: si inter omnes curuas, in quibus $\int S dx$ eundem habeat valorem, quaeratur ea, in qua $\int T dx$ sit maximum vel minimum; tum quaeratur valor ipsius P respondens utrique formulae $\int S dx$ et $\int T dx$, atque alter alteri per constantem quamcunque multiplicato aequalis ponatur, ac resultans aequatio exprimet naturam curvae quaesitae.

§. 22. Quemadmodum autem, si proposita fuerit quaecunque formula $\int Q dx$, differentiam inter valores huius formulae elementis $abcd$ et $a\xi\gamma d$ inueniri oporteat, sequenti modo patebit. Positis ut ante $OA = x$, $Aa = y$, $oa = s$ et elemento dx constante, itemque $dy = p dx$; erit $Bb = \overset{I}{y}$, $Cc = \overset{II}{y}$ et $Dd = \overset{III}{y}$, item $oab = \overset{I}{s}$, $oabc = \overset{II}{s}$, $oabcd = \overset{III}{s}$, denique $\frac{bM}{dx} = p$, $\frac{cN}{dx} = \overset{I}{p}$, et $\frac{dP}{dx} = \overset{II}{p}$. Translatis nunc punctis b et c in ξ et γ quanti-

quantitates istae accipient sequentia incrementa, posito breuitatis gratia $q = \frac{dy}{ds}$.

$ds = 0$	$\overset{I}{ds} = q.b\mathfrak{E}$	$\overset{II}{ds} = -dq.b\mathfrak{E} - q.c\gamma$
$dy = 0$	$\overset{I}{dy} = b\mathfrak{E}$	$\overset{II}{dy} = -c\gamma$
$dx = 0$	$\overset{I}{dx} = 0$	$\overset{II}{dx} = 0$
$dp = \frac{b\mathfrak{E}}{dx}$	$\overset{I}{dp} = \frac{-b\mathfrak{E} - c\gamma}{dx}$	$\overset{II}{dp} = \frac{c\gamma}{dx}$

§. 23. Sit iam proposita formula $\int Q dx$, quae vel communis vel maxima minimaue esse debeat, ideoque aequaliter expressa tam pro elementis $abcd$ quam $a\mathfrak{E}\gamma d$; sit autem Q functio quaecunque ipsarum x, y, s et p posito $dy = p dx$; ita vt dQ habiturum sit huiusmodi formam $L ds + M dy + N dx + V dp$. Elementis au-

tem $abcd$ respondebit iste valor $Q dx + \overset{I}{Q} dx + \overset{II}{Q} dx$, qui secundum translationem punctorum b et c in \mathfrak{E} et γ differentiatu differentialibus ipsarum $s, y, p, s, y, p, s, y, p$ sumtis uti est praeceptum, dabit sequens differentiale.

$$dQ dx = V.b\mathfrak{E}$$

$$\overset{I}{dQ} dx = \overset{I}{L} q dx.b\mathfrak{E} + \overset{I}{M} dx.b\mathfrak{E} - \overset{I}{V}.b\mathfrak{E} - \overset{I}{V}.c\gamma$$

$$\overset{II}{dQ} dx = -\overset{II}{L} dx dq.b\mathfrak{E} - \overset{II}{L} q dx.c\gamma - \overset{II}{M} dx.c\gamma + \overset{II}{V}.c\gamma$$

quod positum $= 0$ dat

$$(-dV + \overset{I}{L} q dx + \overset{I}{M} dx - \overset{II}{L} dx dq)b\mathfrak{E} = (-dV + \overset{I}{L} q dx + \overset{II}{M} dx)c\gamma$$

Tom. VIII.

Z

Erit

Erit ergo

$$\frac{dP}{P} = \frac{-dV + \overset{I}{L} dx dq + dx d(\overset{I}{L} q + \overset{I}{M})}{-dV + dx(\overset{I}{L} q + \overset{I}{M})}$$

Ex qua aequatione integrata prodibit valor

$$P = e^{\int \frac{L dx dq}{-dV + dx(Lq + M)}} (-dV + dx(Lq + M))$$

denotante e numerum cuius log. est 1.

§. 24. Pro quaestionibus autem ad primam classē pertinentibus eidem formulae $\int Q dx$ respondere inuenimus supra §. 6. hunc valorem $P = -dV + dx(LQ + M)$, qui valor a nunc inuento pro quaestionibus secundae classis tantum differt quantitate exponentiali. Quare si L euanescat, quod accidit quando Q non ab s , sed tantum ab x, y et p pender, tum vtraque formula in eandem recidit $P = -dV + M dx$, quae ergo pro quaestionibus secundae classis aequae valet ac pro quaestionibus primae classis. Ex praecedente autem mea dissertatione aequae ac ex ista intelligitur eandem formulam $P = -dV + M dx$, quae respondet quantitati $\int Q dx$ existente $dQ = M dy + N dx + V dp$, quoque ad quaestiones classis tertiae atque omnium sequentium sufficere; in quibus quaeri solet inter omnes curuas duas pluresue proprietates communes habentes ea curua, quae maximi minimae proprietate gaudeat; ita vt his casibus pro sequentibus classibus novos pro P valores eruere non sit opus.

§. 25. Valor autem ipſius $P = e^{\int \frac{Ldx + dq}{-dV + (Lq + M)dx}}$
 $[-dV + dx(Lq + M)]$, quem pro quantitate $\int Qdx$
 exiſtente Q functione quacunque ipſarum x, y, s ha-
 rumque differentialibus, ita vt fit $dQ = Lds + Mdy$
 $+ Ndx + Vdp$, tam late patet, vt non ſolum 16
 priores formulas omnes in praecedente mea diſſertatio-
 ne exhibita complectatur, ſed inſuper innumerabilibus
 aliis quaestionibus ſoluendis inferuiat; ad quas illae for-
 mulae ſunt inſufficientes; quorum vtrumque exemplo
 declarari conueniet. Propoſitum igitur ſit inter omnes
 curuas AM , quae ad axem AB aequales conſtituunt
 areas AMQ , eam determinare, quae in fluido ſecun-
 dum axis AB directionem mota minimam patitur re-
 ſiſtentiam. Sumt s abſciſſis AP in recta AC ad axem
 AB normali, ponaturque $AP = x = QM$, $PM = y$
 $= AQ$, et $AM = s$, erit area $AQM = \int x dy$, quae
 omnibus curuis per A et M tranſeuntibus communis
 eſſe debet. Deinde reſiſtentia, quam elementum Mm
 in fluido motum patitur, eſt vt Mm ductum in quadra-
 tum ſinus ang incidentiae Mmn hoc eſt vt $\frac{dx^2}{ds^2}$, im-
 pediet ergo motum vi $\frac{dx^2}{ds^2}$, ita vt tota reſiſtentia, quae
 minima eſſe debet, futura ſit $= \int \frac{dx^2}{ds^2}$.

Tabula X.
 Figura 2.

§. 26. Formulae igitur, pro quibus valores ipſius P
 quaerere debemus, ſunt $\int x dy$ et $\int \frac{dx^2}{ds^2}$. Conſideremus
 primo hanc $\int x dy$, quae poſito $dy = p dx$, abit in $\int x p dx$,
 haecque cum $\int Q dx$ comparata dat $Q = xp$ et $dQ =$
 $p dx + x dp$. Erit itaque $L = 0$, $M = 0$, $N = p$ et

$Z = 2$

$V = x$

$V=x$, unde fiet $P=-dx$. Altera forma $\int \frac{dx^3}{ds^2}$ transit in hanc $\int \frac{dx}{1+pp}$, ita ut fit $Q=\frac{x}{1+pp}$ et $dQ=\frac{-2pdp}{(1+pp)^2}$. Fiet ergo pro hac formula $L=0$, $M=0$, $N=0$ atque $V=\frac{-p}{(1+pp)^2}$, cui respondebit consequenter $P=\frac{dp}{(1+pp)^2}-\frac{p^2 dp}{(1+pp)^3}=\frac{dp-3p^2 dp}{(1+pp)^3}$. His inuentis ponatur alter ipsius P valor aequalis multiplo alterius, et prodibit $dx=\frac{adp-3ap^2 dp}{(1+pp)^2}$ atque $x=\frac{ap}{(1+pp)^2}$. Cum autem fit $dy=pdx$, erit $y=px-\int x dp=\frac{ap^2}{(1+pp)^2}-\int \frac{ap dp}{(1+pp)^2}=\frac{a+3app}{2(1+pp)^2}$. Curua ergo quaesita erit algebraica, atque eliminata p inuenietur sequens inter x et y pro curua aequatio

$$y^4-2y^2x^2+x^4=18ax^2y+2cy^3-27c^2x^2$$

mutato pro arbitrio constantis a valore.

Tabula IX.
Figura 4

§. 27. Nunc ad exemplum proferendum, ad quod formulae prius datae non sufficiunt, fit in hypothesi potentiarum corpus sollicitantium et resistentia quacunque inter omnes curuas AM super quibus corpus ex A descendens in M eandem acquirit velocitatem, inuenienda ea curua AM , super qua corpus ex A in M citissime perueniet. Posito ergo ut ante §. 16. 17. $AP=x$, $PM=y$, $AM=s$, et potentia corpus secundum MP sollicitante $=P$, potentia corpus secundum MQ trahente $=Q$, celeritate in M debita altitudini v et resistentia $=R$, erit $dv=Qdx-Pdy-Rds$. Duae igitur formulae, quae sunt propositae, erunt $\int dv=\int [Q-Pp-RV(1+pp)]dx$ atque $\int \frac{ds}{v}=\int \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v}$. Pro prima igitur formula erit $Q=Q-Pp-RV(1+pp)$; ponatur $dQ=Sdy+Xdx$ et $dP=Tdy+Ydx$ (ab x enim et y tantum pendebunt Q et P) atque $dR=Zdv=ZQ$

$= ZQdx - ZPdy - ZRds$; erit itaque nostrum $dQ =$
 $Sdy + Xdx - Pdp - TpdY - Ypdx - \frac{Rpd}{\sqrt{(1+pp)}} - ZQdx$
 $\sqrt{(1+pp)} + ZPdy\sqrt{(1+pp)} + ZRds\sqrt{(1+pp)}$. Hanc
 ob rem fiet $L = ZR\sqrt{(1+pp)}$, $M = S - Tp + ZP\sqrt{(1+pp)}$
 $V = -P - \frac{Rp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his ob $q = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ atque dq
 $= \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ sequens eruetur valor ipsius $P =$

$e \int \frac{Z R d x d p}{(S+Y) d x (1+pp) + Z(P d x + Q d y) \sqrt{(1+pp)}} + \frac{R d p}{\sqrt{(1+pp)}} [(S+Y) d x$
 $(1+pp) + Z(P d x + Q d y) \sqrt{(1+pp)} + \frac{R d p}{\sqrt{(1+pp)}}]$.
 Altera vero formula $\int \frac{d x y \sqrt{(1+pp)}}{v}$ modo vt supra tractata
 dabit $L = \frac{R \sqrt{(1+pp)}}{2 v \sqrt{v}}$, $M = \frac{P \sqrt{(1+pp)}}{2 v \sqrt{v}}$ et $V = \frac{p}{v \sqrt{(1+pp)}}$ atque
 $dV = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}} \sqrt{v}} - \frac{p dv}{2 v \sqrt{v} (1+pp)}$ adeo vt fiat $P =$

$e \int \frac{R d x d p}{(P d x + Q d y) \sqrt{(1+pp)} - \frac{2 v d p}{\sqrt{(1+pp)}}} [(P d x + Q d y) \sqrt{(1+pp)} - \frac{2 v d p}{\sqrt{(1+pp)}}]$.

Duorum horum valorum ipsius P multipla quaecunque
 sibi aequalia posita dabunt aequationem pro curua quae-
 sita, quam autem ulterius persequi calculi prolixitas non
 permittit.

§. 28. Sit nunc formula, quae vel omnibus curuis
 communis esse debet vel in quaesita curua maximum
 minimumue, haec $\int Q dx \int R dx$; sit autem $dQ = L ds$
 $+ M dy + N dx + V dp$ et $dR = E ds + F dy + G dx$
 $+ I dp$. Dabit ergo haec formula pro elementis $abcd$
 hanc expressionem $Q dx \int R dx + Q dx \int R dx + Q dx$
 $\int R dx$. Huius differentiale secundum data praecepta da-
 bit vt sequitur:

Z 3

d. Qdx

Tabula IX.
Figura 1.

182 INVENTIO CURVARVM MAXIMI MINIM.

$$d. Q dx \int R dx = V. b \int R dx$$

$$d. Q dx \int R dx = L q dx. b \int R dx + M dx b \int R dx - V (b \int + c \gamma) \int R dx + Q I dx. b \int$$

$$d. Q dx \int R dx = -L dx dq. b \int R dx - L q dx. c \gamma \int R dx - M dx. c \gamma \int R dx + V. c \gamma \int R dx + Q I dx. b \int + Q (E q + F) dx^2. b \int - Q I dx (b \int + c \gamma)$$

Haec differentialia si ponantur = 0 prodibit $b \int (-d. V \int R dx + (L q + M) dx \int R dx - L dx dq \int R dx + Q I dx + Q (E q + F) dx^2 - d. Q I dx) = c \gamma (-d. V \int R dx + (L q + M) dx \int R dx + Q I dx$. Ex hac aequatione orietur $\frac{dP}{P} = \frac{-d. V \int R dx + dx d. (L q + M) \int R dx - Q (E q + F) dx^2 - d. V \int R dx + (L q + M) dx \int R dx + L dx dq \int R dx + Q d I dx + d. Q I dx}{Q I dx - L dx dq \int R dx - d. Q I dx}$. Hincque erit $P = e^{\int \frac{Q d I dx + L dx dq \int R dx - Q (E q + F) dx^2}{-d. V \int R dx + (L q + M) dx \int R dx + Q I dx} (-d. V \int R dx + (L q + M) dx \int R dx + Q I dx)}$; qui ergo valor ipsius P respondet quantitati $\int Q dx \int R dx$, quae non solum omnes formulas 24 ante a me prolatas comprehendit, sed etiam longe latius patet.

§. 29. Ex his intelligitur methodo exposita etiam alias formulas $\int Q dx$, in quibus Q non solum per x, y, s et p ,

s et p , fed praeterea a quibuscunque integrationibus quin etiam a constructione aequationum quarumcunque differentialium pendet, ad valorem ipsius P inueniendum reduci posse. Tantum autem peculiari modo est opus, si in Q differentialia secundi altiorumue graduum contineantur, pro quibus casibus plura quam tria elementa considerari debent. Contineat igitur Q in $\int Q dx$ praeter x, y et s , eorumque differentialia etiam differentialia secundi gradus in se, ita vt posito $dy = p dx$ et $dp = r dx$ futurum sit $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp + W dr$. Ex qua expressione vt valor ipsius P eruatur, necesse est quinque elementa $abcdef$ considerare, quorum quidem duo duntaxat puncta c et d in loca proxima γ et δ transferantur. Hac igitur translatione per differentiationem representata fiet

Tabula X.
 Figura 3.

$ds = 0$	$\overset{\text{I}}{ds} = 0$	$\overset{\text{II}}{ds} = q \cdot c \gamma$	$\overset{\text{III}}{ds} = -dq \cdot c \gamma - q \cdot d\delta$
$dy = 0$	$\overset{\text{I}}{dy} = 0$	$\overset{\text{II}}{dy} = c \gamma$	$\overset{\text{III}}{dy} = -d\delta$
$dx = 0$	$\overset{\text{I}}{dx} = 0$	$\overset{\text{II}}{dx} = 0$	$\overset{\text{III}}{dx} = 0$
$dp = 0$	$\overset{\text{I}}{dp} = \frac{c \gamma}{dx}$	$\overset{\text{II}}{dp} = \frac{-c \gamma - d\delta}{dx}$	$\overset{\text{II}}{dp} = \frac{d\delta}{dx}$
$dr = \frac{c \gamma}{dx^2}$	$\overset{\text{I}}{dr} = \frac{-2c \gamma - d\delta}{dx^2}$	$\overset{\text{II}}{dr} = \frac{c \gamma + 2d\delta}{dx^2}$	$\overset{\text{III}}{dr} = \frac{-d\delta}{dx^2}$

$\overset{\text{IV}}{ds} = -dq \cdot c \gamma + dq \cdot d\delta$, reliqua euanescent. Quocirca si valor elementis $abcdef$ respondens differentietur, et loco differentialium valores assignati substituantur, prodibit differentia inter illum valorem et eundem elementis $ab\gamma\delta ef$ respondentem.

§. 30. Quo igitur hanc differentiam pro valore qui ex $\int Q dx$ oritur et elementis $abcdef$ respondet, inueniamus, differentiari oportet hanc formulam $Q dx +$
 $\overset{I}{Q} dx + \overset{II}{Q} dx + \overset{III}{Q} dx + \overset{IV}{Q} dx$ secundum regulam datam prodibitque

$$dQ dx = \frac{W.c\gamma}{dx}$$

$$\overset{I}{dQ} dx = \overset{I}{V}.c\gamma - \frac{\overset{I}{2W}.c\gamma}{dx} - \frac{\overset{I}{W}.d\delta}{dx}$$

$$\overset{II}{dQ} dx = \overset{II}{L} q dx.c\gamma + \overset{II}{M} dx.c\gamma - \overset{II}{V}.c\gamma - \overset{II}{V}.d\delta + \frac{\overset{II}{W}.c\gamma}{dx} + \frac{\overset{II}{2W}.d\delta}{dx}$$

$$\overset{III}{dQ} dx = \overset{III}{L} dx dq.c\gamma - \overset{III}{L} q dx d\delta - \overset{III}{M} dx.d\delta + \overset{III}{V}.d\delta - \frac{\overset{III}{W}.d\delta}{dx}$$

$$\overset{IV}{dQ} dx = \overset{IV}{L} dx dq.c\gamma + \overset{IV}{L} dx dq.d\delta.$$

Haec differentia nihilo aequalis posita dabit $c\gamma (\frac{dW}{dx} -$
 $\overset{I}{dV} + (\overset{II}{L}q + \overset{II}{M})dx - (\overset{III}{L} + \overset{IV}{L})dx dq) = d\delta (\frac{dW}{dx} - dV$
 $+ (\overset{III}{L}q + \overset{III}{M})dx) - \overset{IV}{L} dx dq$, quae aequatio comparata cum canonica $P.c\gamma = (P + dP)d\delta$ dat

$$\frac{dP}{P} = \frac{\overset{I}{d^2W} - \overset{I}{ddV} dx + dx^2 \cdot \frac{\overset{II}{d}(Lq + M)}{dx} - dx^2 \frac{\overset{III}{dL} dq}{dx} + \overset{IV}{L} dx^2 dq}{ddW - dx dV + dx^2 (Lq + M) - (\overset{III}{L} + \overset{IV}{L}) dx^2 dq}$$

Hinc ergo integrando prodibit sequens valor ipsius

$$P = e^{\int \frac{L dx^2 dq}{ddW - dV dx + dx^2 (Lq + M)}} [ddW - dV dx + dx^2 (Lq + M)]$$

posito ut hactenus $q = \frac{dy}{ds}$.

§. 31. Perspicuum igitur est hunc valorem ipsius P facto $L = 0$ fore $ddW - dV dx + M dx^2$, ideoque non diuer-

diuersum ab eo, quem pro prima classe eiusdem formulae $\int Q dx$ respondentem inuenimus §. 13. Atque generalius etiam valet pro omnibus sequentibus classibus, si in $\int Q dx$, Q pendeat quomodocunque ab x, y eorumque differentialibus tam primi gradus quam secundi, non vero ab s perpetuo ipsi eandem formulam $P = dVx + Mdx^2$ respondere, ex hacque omnes omnino quaestiones posse resolui. Similiter etiam colligere licet, si Q praeter x, y et eorum differentialia tum primi tum secundi gradus quoque differentialia tertii et altiorum graduum inuoluat, eundem valorem pro P inuentum omnibus classibus inseruire. Scilicet si ponatur $dy = p dx$, $dp = r dx$, $dr = t dx$, $dt = u dx$ etc. fueritque $dQ = N dx + M dy + V dp + W dr + X dt + Y du$ etc. tum ipsi $\int Q dx$ respondebit sequens valor ipsius $P = M - \frac{dV}{dx} + \frac{d dW}{dx^2} - \frac{d^3 X}{dx^3} + \frac{d^4 Y}{dx^4} -$ etc. qui ipsius P valor locum habet in omnibus classibus.

§. 22. Ad vsum huius formulae monstrandum quaerenda sit inter omnes omnino curuas ea, in qua $\int \frac{d^3 y}{dx^3 dy}$ sit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = p dx$, $dp = r dx$, $dr = t dx$, quibus substitutis debeat ista formula $\int \frac{t dx}{p}$ esse maximum vel minimum. Fiet igitur $Q = \frac{t}{p}$ atque $dQ = -\frac{t dp}{p^2} + \frac{dt}{p}$, quare erit $N = 0, M = 0, V = -\frac{t}{p^2}, W = 0, X = \frac{t}{p}, Y$ etc. $= 0$. Hinc prodit valor ipsius $P = -\frac{dV}{dx} - \frac{d^3 X}{dx^3}$, qui posito aequalis nihilo et integratus dat $V dx^2 + d dX = A dx^2$. Substitutis autem loco V et X valoribus inuentis prodibit $-\frac{t dx^2}{p^2}$.

$-\frac{ddp}{p^2} + \frac{2dp^2}{p^3} = A dx^2$. Est autem $t = \frac{dr}{dx} = \frac{ddp}{dx^2}$, unde
 erit $-\frac{2d \frac{dr}{dx}}{p^2} + \frac{2dp^2}{p^3} = A dx^2$. Cum porro sit $dx = \frac{dp}{r}$
 atque $ddx = 0$, erit $ddp = \frac{dp dr}{r}$, quibus surrogatis ha-
 bebitur $-\frac{2dr}{r p^2} + \frac{2dp}{p^3} = \frac{A dp}{r^2}$ quae transit in hanc $\frac{2p r dr + 2r^2 dp}{p^3} = A dp$,
 cuius integralis est $B - \frac{r^2}{p^2} = A p$. Hinc fiet
 $r = \frac{dp}{dx} = \sqrt{B p^2 - A p^3}$ seu $dx = \frac{dp}{\sqrt{B p^2 - A p^3}}$. Posito nunc
 $B = 0$ et mutata constante erit $dx = \frac{adp}{2p\sqrt{p}}$ seu $x = \frac{a}{\sqrt{p}}$,
 atque $p = \frac{a^2}{x^2} = \frac{dy}{dx}$, ex qua fit $y = b - \frac{a^2}{x}$, quae est pro
 hyperbola intra asymptotos. Posito vero $A = 0$ fit $x = lp$
 et $\frac{dy}{dx} = p = e^{\frac{x}{a}}$. Unde oritur $y = ae^{\frac{x}{a}}$ et $x = al \frac{y}{a}$; quae
 est pro curua logarithmica.

§. 33. In formula autem generali $\int Q dx$ si in Q
 ingrediatur vel arcus s vel alia quantitas integralis vt
 $\int R dx$, tum valor ipsius P magis erit compositus pro
 quaestionibus secundae quam primae classis, accedente
 scilicet quantitate exponentiali. Pro sequentibus autem
 classibus valor ipsius P nequidem exhiberi potest, sed
 tum in solutione problematum, in quibus huiusmodi
 formulae occurrunt, ad modum confugiendum est quem
 in praecedente dissertatione exposui. Interim tamen haec
 regula semper potest magna cum utilitate adhiberi. Si
 Q pendeat ab s ita vt in eius differentiali insit termi-
 nus $L ds$, et in quaestionibus secundae sequentiumue clas-
 sium vna conditio sit vt omnes curuae sint aequae longae,
 i. e. si $\int ds$ fuerit vna proprietatum, quae vel omnibus
 curuis communis vel in quaesita maximum minimumue
 esse

esse debeat, tum tuto vsurpari poterit valor ipsius P ad primam classem pertineas. Simili modo etiam si in $\int Q dx$ pendeat Q ab alia quantitate integrali vt $\int R dx$, tum quoque valor ipsius P ad primam classem pertineas potest vsurpari, si quidem $\int R dx$ etiam inter proprietates, quae omnibus curvis communes esse debeant, reperiatur. Hoc itaque artificio quaestiones alias difficillimae solutu admodum faciles redduntur.

§. 34. Quod autem, si Q in $\int Q dx$ contineat in se vel arcum s vel aliam quantitatem integram, tum valor ipsius P pro classe secunda magis fiat compositus, quam pro prima, atque in sequentibus classibus plane non exhiberi queat, nisi vel s vel aliae omnes quantitates integrales, quae in Q continentur, simul inter quantitates propositas reperiantur, quae omnibus iis curvis communes esse debent, ex quibus quaesita debet determinari, eius difficultatis ratio in hoc consistit; quod translato b in \mathcal{E} , haec mutatio non tantum expressio nem ad elementa abc pertinentem afficiat et immutet, sed insuper ipsius $\int Q dx$ valorem, qui omnibus sequentibus elementis post c competit, afficiat atque immutet; quemadmodum si re ipsa ad sequentia elementa hunc ipsius $\int Q dx$ valorem applicemus, statim elucebit. Sed si Q in $\int Q dx$ tantum ab x et y horumque differentia libus cuiusque ordinis pendeat, tum hoc incommodum locum non habet, sed quomocunque punctum b varietur, tamen haec variatio in sequentia post c elementa nullum omnino habet influxum, vti ex allatis facile intelligitur.

Tabula IX.
Figura I.

Tabula IX.
Figura 4.

§. 35. Si inter omnes curvas puncta o et z iungentes ea debeat determinari, in qua formula Q neque ab s neque alia quantitate integrali pendeat, debeat esse maximum vel minimum, tum curva oz vtique hanc habebit proprietatem, si eius quaevis portio oa eadem praerogatiua gaudeat. At si Q pendeat vel ab s vel ab alia quantitate integrali, tum curva oz habere poterit $\int Q dx$ maximum vel minimum, etiamsi eius nulla portio hac praerogatiua gaudeat, cum translato b in ξ tota curvae portio cz alium induat valorem ex $\int Q dx$, qui valor forte maior vel minor esse potest, etiamsi valor elementis abc competens non sit maximus vel minimus. Quamobrem si quaeratur inter omnes curvas puncta definita o et z iungentes ea, in qua $\int Q dx$ inuolvente Q vel s vel aliam quantitatem integram, debeat esse maximum minimumue, tum positio elementorum abc non ex eo debet determinari, quo valor $\int Q dx$ ad ea applicatus fiat maximus minimusue, sed potius illa positio est quaerenda, quae pro omnibus sequentibus elementis $cdefg$ etc. atque adeo pro tota portione az generet maximum minimumue valorem ipsius $\int Q dx$.

§. 36. Haec autem determinatio positionis elementorum abc sequenti modo debet institui. Translato b in ξ effici debet, vt eadem quantitas $\int Q dx$ tam in curua in $abc --- z$ quam in $a\xi c --- z$ redundet. Posito autem Q ab s pendere vt sit $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp$ posito $dy = p dx$, erit differentia inter valores curvae $abc --- z$ et curvae $a\xi c --- z$ respondentes,

dentes, quae aequalis esse debet 0, sequens (posito $q = \frac{dy}{dx}$) $V.b\mathfrak{E} + \overset{\text{I}}{L}q dx.b\mathfrak{E} + \overset{\text{I}}{M}dx.b\mathfrak{E} - \overset{\text{I}}{V}.b\mathfrak{E} - \overset{\text{II}}{L}dx dq.b\mathfrak{E} - \overset{\text{III}}{L}dx dq.b\mathfrak{E} - \overset{\text{IV}}{L}dx dq.b\mathfrak{E}$ etc. donec ad punctum z erit peruentum. Abscissae autem OC respondet valor $\overset{\text{II}}{L}$; quare si punctum z in c incideret haberetur praeter terminos $V.b\mathfrak{E} + \overset{\text{I}}{L}q dx.b\mathfrak{E} + \overset{\text{I}}{M}dx.b\mathfrak{E} - \overset{\text{I}}{V}.b\mathfrak{E}$ tantum $-\overset{\text{II}}{L}dx dq.b\mathfrak{E}$. Sin autem in d incideret haberetur $-dx dq.b\mathfrak{E}(\overset{\text{II}}{L} + \overset{\text{III}}{L})$ et responderet abscissae $AC + dx$. Sumto autem in ipso puncto z , et posito abscissae interuallo $CZ = ndx$ erit terminus adiiciendus et respondens abscissae $OZ = OC + ndx$ iste $-dx dq.b\mathfrak{E}(\overset{\text{II}}{L} + \overset{\text{III}}{L} + \overset{\text{IV}}{L} + \dots + L^{n-1})$. At cum sit n numerus infinitus, erit iste terminus $= -dx dq.b\mathfrak{E}(\overset{\text{II}}{nL} + \frac{n^2 dL^{\text{II}}}{1.2} + \frac{n^3 ddL^{\text{II}}}{1.2.3} + \frac{n^4 d^2L^{\text{II}}}{1.2.3.4} \text{ etc.})$.

§. 37. Cum autem distantia OZ sit data ideoque constans, ponatur ea $= a$, erit $x + ndx = a$, hincque $n = \frac{a-x}{dx}$. Quo substituto erit terminus iste ab $V.b\mathfrak{E}$

$+ \overset{\text{I}}{L}.q dx.b\mathfrak{E} + \overset{\text{I}}{M}dx.b\mathfrak{E} - \overset{\text{I}}{V}.b\mathfrak{E}$ auferendus sequens:

$$dq.b\mathfrak{E}[(a-x)L + \frac{(a-x)^2 dL}{1.2 dx} + \frac{(a-x)^3 ddL}{1.2.3 d^2 x^2} \text{ etc.}]$$

At $\int L dx$ si post integrationem ponatur a loco x , abit in hanc expressionem:

Aa 3

$\int L dx$

$\int L dx + (a-x)L + \frac{(a-x)^2 dL}{1.2 dx} + \frac{(a-x)^3 ddL}{1.2.3. dx^2} + \text{etc.}$
 quae expressio cum sit constans, ponatur $= A$ erit ergo

$A - \int L dx = (a-x)L + \frac{(a-x)^2 dL}{1.2. dx} + \text{etc.}$
 quare quantitas subtrahenda illa erit haec

$$dq. b^8 (A - \int L dx).$$

Hanc ob rem habebitur pro curua quaesita ista aequatio
 $-dV + dx(Lq + M) = A dq - dq \int L dx.$

Atque valor ipsius P tam pro quaestionibus primae clas-
 sis quam sequentium erit semper idem scilicet

$$P = -dV + dx(Lq + M) + dq \int L dx.$$

ubi $\int L dx$ ita ponitur esse integratum, ut evanescat
 sumto puncto indefinito a in puncto fixo z seu posito
 $x = a$. Simili quoque modo erit progrediendum si Q
 ab alia quantitate integrali pendeat.